

**Licenciaturas en Matemáticas y en Computación,  
U. de Guanajuato  
Tarea 3 de Álgebra Lineal II: polinomio mínimo.  
lunes 17 de septiembre de 2012  
Fecha de entrega: lunes 24 de septiembre de 2012.**

1. Construya un ejemplo de una matriz  $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  tal que  $A$  no tiene ningún valor propio real pero  $A^4$  sí tiene al menos uno.
  
2. Suponga que el polinomio  $q(x) \in \mathbb{C}[x]$  tiene grado  $k > 0$ . Demuestre que  $q(x)$  tiene  $k$  raíces distintas si y sólo si  $q(x)$  y su derivada no comparten ninguna raíz.
  
3. Demuestre o dé un contraejemplo para (ambas implicaciones de) la siguiente afirmación:  
Dos matrices  $A$  y  $B$  son similares si y sólo si sus polinomios mínimos  $m_A(x)$  y  $m_B(x)$  son iguales.  
Recuerde que, por definición,  $A$  y  $B$  son similares si existe  $Q$  invertible tal que  $A = Q^{-1}BQ$ .
  
4. Calcule los polinomios mínimo y característico de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$